Типовые задания на числовые последовательности.

**Пример 1.**

Найти общий член последовательности 1, 4, 9, 16, 25, …

Решение:

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image030.gifи т.д.

Следовательно http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image032.gif

**Пример 2.**

Найти общий член последовательности

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image034.gif

Решение:

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image036.gif, http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image038.gif

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image040.gif, http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image042.gifи т.д.

Следовательно:

**http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image044.gif**

**Пример 3.**

Доказать, что последовательность с общим членом

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image046.gifимеет предел, равный нулю.

Решение : запишем ряд членов последовательности

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image048.gif

и положим http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image050.gif. Для всех членов данной последовательности, начиная с четвертого, выполняется равенство

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image052.gif

Действительно

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image054.gifи т.д.

В данном случае *N*можно принять равным трем (или любому числу, больше трех), так как, если порядковый номер члена последовательности n больше трех, то выполняется неравенство

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image055.gif.

Положим теперь http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image057.gif. Ясно, что для всех членов последовательности начиная с седьмого,

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image059.gif.

Теперь за *N* можно принять шесть (или любое число, большее шести). Если http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image061.gif, то http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image063.gifи т.д.

В данном случае можно найти общее выражение для числа *N* в зависимости от http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image065.gifОбщий член данной последовательности http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image067.gif. Задавшись произвольным положительным числом http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image068.gif, мы должны в соответствии с определением предела, потребовать, чтобы при *n > N* выполнялось неравенствоhttp://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image070.gif, если http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image072.gif.

Решая неравенство относительно n, получаем http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image074.gif. Итак, за *N* можно принять число http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image076.gif(или любое большее число). Таким образом, мы показали, что для любого http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image077.gifсуществует такое http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image079.gif, что при http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image081.gif, выполняется неравенство http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image083.gif, а это и доказывает, что пределом последовательности является нуль.

Отметим, что в этой задаче члены последовательности приближались к своему пределу, оставаясь больше этого предела, как говорят, справа.

**Пример 4.**

 Доказать, что последовательность с общим членом

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image114.gifимеет предел равный нулю.

Решение : запишем ряд членов последовательности

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image116.gif

найдем выражение для числа *N* в зависимости от http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image117.gif. Для любого *n > N* имеем http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image119.gif, или http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image121.gif. Решая неравенство относительно *n* , получаем http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image123.gif. Итак, за *N* можно принять число http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image125.gif(или любое большее число).

Таким образом, для любого http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image106.gifсуществует такое http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image128.gif, что при http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image130.gifвыполняется неравенство http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image131.gif.

Это значит, что пределом данной последовательности является число нуль.

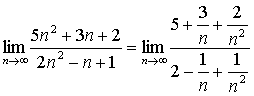
**Пример 5.**

Найти http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image133.gif.

Решение:

Преобразуем выражение http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image135.gif, поделив почленно числитель и знаменатель на *n2*.

Тогда :

.

Теперь общий член последовательности можно считать полученным в результате суммирования, вычитания и деления общих членов последовательностей

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image139.gif

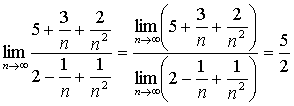
Так как пределы последовательностей http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image141.gifравны нулю, а пределы последовательностей http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image143.gifравны соответственно 5 и 2, т.е. все эти последовательности сходящиеся, то:

1) по формуле (1) этого параграфа

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image145.gif

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image147.gif

2) по формуле (3) этого параграфа



Итак, предел данной последовательности равен http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image151.gif.

**Пример 6.**

Найти предел последовательности с общим членом http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image153.gif.

Решение : в этой задаче требуется найти http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image155.gif.

Символом *n!*(читается “эн факториал”) обозначают для краткости произведение *n* первых чисел натурального ряда. Поэтому http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image157.gif, аhttp://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image159.gif. Очевидно, что http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image161.gif. Тогда:

http://edu.dvgups.ru/METDOC/ENF/VMATEM/SEMESTR1/1.9.files/image163.gif